Analiza Funkcjonalna + Topologia
WPPT IVr. semestr letni 2013
WYKŁAD 11: Twierdzenia o operatorach ciągłych

Poniższe twierdzenia znane są pod nazwą *twierdzeń Banacha* i wykorzystują one twierdzenie Baire'a do udowodnienia własności operatorów ciągłych na przestrzeniach Banacha. Przypomnijmy, że operator z jednej przestrzeni unormowanej w drugą jest ciągły wtedy i tylko wtedy, gdy jest ograniczony (na kuli jednostkowej). Przypomnijmy też dwie proste obserwacje topologiczne: odwzorowanie ciągłe, to takie, że przeciwobrazy zbiorów otwartych są otwarte. Nie oznacza to jednak *otwartości*, tzn., że obrazy zbiorów otwartych są otwarte. Prostym przykładem jest funkcja x^2 i przedział $(-1,1)$ (jego obrazem jest $[0,1)$). Wykres odwzorowania ciągłego $f : X \to Y$, zdefiniowany jako zbiór $F = \{(x, f(x)) : x \in X\} \subset X \times Y$, jest zawsze zbiorem domkniętym w $X \times Y$ z topologią produktową (jeśli pary $(x_n, f(x_n))$ zbiegają do (x, y) to musi być $y = f(x)$). Ale domkniętość wykresu na ogół nie wystarcza do ciągłości. Prostym przykładem jest funkcja $1/x$ na $\mathbb{R}$ z dodaną wartością 0 w zerze. Wreszcie z ciągłości funkcji odwracalnej nie wynika ciągłość jej odwrotnej (nawet na przestrzeniach zupełnych). Na przykład tożsamość jest ciągła na przestrzeni dyskretnej X w przestrzeń X z inną topologią, ale odwrotna nie.

Okazuje się, że w przypadku operatorów na przestrzeniach Banacha tego typu implikacje są prawdziwe. Tu i ówdzie trzeba jednak założyć surjektywność lub/i różnowartościowość. Proszę zwrócić uwagę na te założenia i zapamiętać je.

Pierwszym z twierdzeń jest

Twierdzenie o odwzorowaniu otwartym. Jeśli $T : X \to Y$ jest operatorem ciągłym z przestrzeni Banacha **na** przestrzeń Banacha, to T jest odwzorowaniem otwartym.

Dowód: Żeby nam się nie myliło, kule w X będziemy oznaczać przez $B(x, r)$, a kule w Y przez $K(y, r)$. Kule wokół zera (o promieniu r) oznaczymy odpowiednio przez B_r i K_r.
Wystarczy pokazywać, że obraz kuli B_1 (wokół zera, o promieniu 1, w X) zawiera pewną kulę K_ϵ) (wokół zera, w Y). Jeśli to pokażemy, to weźmy zbiór otwarty $U \in X$ i rozważmy jego obraz $T(U)$. Mamy pokazać, że dla dowolnego $y_0 \in T(U)$, $T(U)$ zawiera jakąś kulę wokół y_0. Skoro y_0 jest w obrazie U, to istnieje $x_0 \in U$ taki, że $T(x_0) = y_0$. Wtedy z otwartości U, istnieje kula $B = B(x_0, \delta)$ zawarta w U, a wtedy obraz tej kuli $T(B)$ jest zawarty w $T(U)$. Kula B jest obrazem kuli jednostkowej B_1 poprzez odwzorowanie $x \mapsto \delta x + x_0$, zatem $T(B) = T(\delta B_1 + x_0)$, co z liniowości T można zapisać jako $\delta T(B_1) + T(x_0)$, czyli $\delta T(B_1) + y_0$. Skoro $T(B_1)$ zawiera K_ϵ, to $T(B) = \delta T(B_1) + y_0$ (a tym bardziej $T(U)$) zawiera zbiór $\delta K_\epsilon + y_0 = K(y_0, \epsilon\delta)$, co należało pokazać.
A więc jak pokazać, że $T(B_1)$ zawiera kulę wokół zera? Tu właśnie pojawi się twierdzenie Baire'a: Piszemy $X = \bigcup_{n\geq 1} B_n = \bigcup_{n\geq 1} nB_1$, a skoro T jest „na" to

$$Y = T\Big(\bigcup_{n\geq 1} nB_1\Big) = \bigcup_{n\geq 1} T(nB_1) = \bigcup_{n\geq 1} nT(B_1).$$

Skoro przestrzeń zupełna Y jest sumą przeliczalną pewnych zbiorów, to z tw. Baire'a przynajmniej jeden z nich (o numerze n_0) w swoim domknięciu zawiera pewną kulę $K(y,\epsilon)$. Ale jeśli $K(y,\epsilon) \in \overline{n_0 T(B_1)}$, to $K(\frac{y}{n_0}, \frac{\epsilon}{n_0}) \in \overline{T(B_1)}$ (mnożenie i dzielenie przez n_0 są homeomorfizmami). Zmieniając znaczenie y i ϵ pokazaliśmy, że $\overline{T(B_1)}$ zawiera pewną kulę $K(y,\epsilon)$. Teraz wyeliminujemy y zastępując go przez zero. Napiszmy mianowicie tak:[1]

$$K_\epsilon = K(y,\epsilon) - y \subset \overline{T(B_1)} - y \subset \overline{T(B_1)} - \overline{T(B_1)} \subset \overline{T(B_1) - T(B_1)} = \overline{T(B_1 - B_1)} = \overline{T(B_2)}.$$

Dzieląc przez 2 dostajemy $K_{\frac{\epsilon}{2}} \subset \overline{T(B_1)}$, co, zmieniając znaczenie ϵ, można zapisać jako $K_\epsilon \subset \overline{T(B_1)}$. Pozostaje pozbyć, się domknięcia. Niech $y \in K_\epsilon$. Pokażemy, że istnieje $x \in B_1$ taki, że $y = T(x)$ (czyli, że $K_\epsilon \subset T(B_1)$ — to będzie koniec dowodu).

Ponieważ $K_\epsilon \in \overline{T(B_1)}$, zatem istnieje $y_1 \in T(B_1)$ dowolnie blisko y, na przykład tak, że $\|y - y_1\| < \frac{\epsilon}{2}$. Oznacza to, że $y - y_1 \in K_{\frac{\epsilon}{2}}$ co jest zawarte w $\overline{T(B_{\frac{1}{2}})}$ (dzielenie przez 2 jest homeomorfizmem i ,,wyłącza się" przed operator). To oznacza z kolei, że istnieje $y_2 \in T(B_{\frac{1}{2}})$ takie, że $\|y - y_1 - y_2\| < \frac{\epsilon}{4}$. Czyli znowu $y - y_1 - y_2 \in K_{\frac{\epsilon}{4}}$, co jest zawarte w $\overline{T(B_{\frac{1}{4}})}$.

W ten sposób rekurencyjnie skonstruujemy ciąg punktów y_n o własnościach:

(1) $y_n \in T(B_{\frac{1}{2^n}})$,

(2) $\|y - \sum_{i-1}^n y_i\| < \frac{\epsilon}{2^n}$.

Warunek (1) oznacza istnienie punktu $x_n \in B_{\frac{1}{2^n}}$ (czyli po prostu $\|x_n\| < \frac{1}{2^n}$), takiego, że $y_n = T(x_n)$. Zatem sumę $\sum_{i-1}^n y_i$ w warunku (2) można z liniowości operatora przepisać jako $T(\sum_{i-1}^n x_i)$. Ponieważ normy punktów x_n tworzą szereg sumowalny o sumie mniejszej od 1, przeto punkty te tworzą szereg bezwzględnie sumowlany w X. Z zupełności X istnieje zatem granica sum częściowych $x = \lim \sum_{1=1}^n x_i$ oraz $\|x\| < 1$ (czyli $x \in B_1$). Z ciągłości operatora T mamy więc zbieżność sum $\sum_{i-1}^n y_i = T(\sum_{i-1}^n x_i)$ do $T(x)$. Z ciągłości odejmowania i ciągłości normy oraz z warunku (2) dostajemy

$$\|y - T(x)\| = \lim \|y - \sum_{i-1}^n y_i\| \le \lim \frac{\epsilon}{2^n} = 0,$$

co dowodzi, że $y = T(x)$, a ponieważ wiemy już, że $x \in B_1$ mamy koniec dowodu. □

Kolejne twierdzenie Banacha to

[1] Korzystamy z ciągłości odejmowania jako funkcji obu zmiennych i tego, że dla funkcji ciągłej obraz domknięcia jest zawarty w domknięciu obrazu (zastosowaliśmy to do zbioru $T(B_1) \times T(B_1)$ — jego domknięciem w topologii produktowej jest jest $\overline{T(B_1)} \times \overline{T(B_1)}$ — i na to nakładamy funkcję ,,odejmowanie").

Twierdzenie o odwzorowaniu odwrotnym. Jeśli $T : X \to Y$ jest operatorem ciągłym i **różnowartościowym** z przestrzeni Banacha **na** przestrzeń Banacha, to T^{-1} też jest ciągły.

Dowód: Wiemy już, że T jest otwarty. Zatem T^{-1} jest ciągłe (dla odwzorowania odwracalnego przeciwobraz zbioru przez T^{-1}, to to samo, co jego obraz przez T). $\square$

Wniosek. Jako wniosek otrzymujemy, że T^{-1} jest ograniczony, czyli ma jakąś normę skończoną $C > 0$ i wtedy dla pary punktów x oraz $y = T(x)$ mamy $\|x\| = \|T^{-1}(y)\| \le C\|y\| = C\|T(x)\|$, czyli $\|T(x)\| \ge c\|x\|$ (gdzie $c = \frac{1}{C} > 0$). Wraz z normą T daje to dwie stałe skończone, powiedzmy $c > 0$ i $d > 0$, takie że

$$c\|x\| \le \|T(x)\| \le d\|x\|.$$

Ostatnie twierdzenie z tej serii to

Twierdzenie o wykresie domkniętym. Jeśli $T : X \to Y$ jest operatorem liniowym z przestrzeni Banacha **w** przestrzeń Banacha, to T jest ciągły (czyli ograniczony) wtedy i tylko wtedy, gdy jego wykres jest domknięty w $X \times Y$.

Dowód: Jeśli T jest ciągły, to wykres jest domknięty, co jest prawdą dla dowolnych odwzorowań między przestrzeniami topologicznymi.

W przeciwną stronę. Z domkniętości wykresu wynika, że wykres ten (oznaczmy go przez Γ), jako domknięta podprzestrzeń przestrzeni zupełnej $X \times Y$ (z normą na przykład maximum albo suma norm) jest przestrzenią zupełną (czyli Banacha). Teraz mamy dwa operatory (rzutowania)

$$T_1 : \Gamma \to X, \quad T_1(x, y) = x \qquad \text{oraz} \qquad T_2 : \Gamma \to Y, \quad T_2(x, y) = y.$$

Oba operatory są ciągłe (o normie 1), przy czym pierwszy z nich jest surjektywny (bo T jest określony na całym X) i różnowartościowy (jeśli punkty na wykresie mają to samo x na pierwszej współrzędnej, to są tożsame). Zatem stosuje się twierdzenie o odwzorowaniu odwrotnym i $T_1^{-1} : X \to \Gamma$ też jest ciągły. Teraz wystarczy zauważyć, że

$$T = T_2 \circ T_1^{-1}.$$

jest ciągły, jako złożenie funkcji ciągłych. $\square$

Tomasz Downarowicz